

# Tentamen ProgrammaCorrectheid

2 februari 2005

09.00 – 12.00 uur

## Opgave 1

De functies  $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  worden gedefinieerd door

$$\begin{aligned}f(k) &= (k \cdot (100 - k)) \text{ MOD } 31 \\g(0) &= 1 \\g(k + 1) &= f(g(k)) \text{ voor } k \geq 0\end{aligned}$$

Gegeven is de declaratie

**CONST**

$w \in \text{INTEGER} ; \{w \geq 0\}$

**VAR**

$m : \text{INTEGER} ;$

$\{P : M = (\text{MIN } i : i \geq 0 \wedge (\sum j : 0 \leq j < i : g(j)) \geq w : i)\}$

$T;$

$\{Q : m = M\}$

- 1. Definieer voor  $t \geq 0$  de functie  $S(t) = (\sum j : 0 \leq j < t : g(j))$  en leid recurrente betrekkingen af voor  $S$ .
- 2. Ontwerp systematisch een herhalingscommando  $T$  dat aan de gegeven specificatie voldoet.

## Opgave 2

Gegeven: een functie  $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  die increasing is in beide argumenten en de specificatie

**CONST**

$m \in \text{INTEGER} ; \{m \geq 0\}$

$n \in \text{INTEGER} ; \{n \geq 0\}$

**VAR**

$z : \text{INTEGER} ;$

$\{P : Z = (\#j : 0 \leq j < n : (\prod i : 0 \leq i < m : h(i, j)) > 0)\}$

$T;$

$\{Q : z = Z\}$

- 3. Definieer een functie  $F(x, y)$  die een geschikte generalisatie is van de kwantificatie uit de preconditionie. HINT: maak een plaatje.
- 4. Leid voor  $F(x, y)$  geschikte recurrente betrekkingen af, inclusief het basisgeval.
- 5. Geef een implementatie van het commando  $T$ . We vragen niet om het gehele stappenplan uit te schrijven, maar zijn tevreden met de laatste stap: een goede samenvatting, inclusief invariant en variante functie.

lees verder

## Opgave 3

Deze opgave gaat over kettingbreuken. De notatie  $[7, 4, 2, 8, 3]$  staat voor het rationale getal

$$7 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{8 + \frac{1}{3}}}}$$

Hieruit zien we direct de betrekking:  $[7, 4, 2, 8, 3] = 7 + \frac{1}{[4, 2, 8, 3]}$ . Dit inspireert tot het volgende. Laat gegeven zijn

**CONST**

$m \in \text{INTEGER} ; \{m > 0\}$

$a \in \text{ARRAY} [0 \dots m) \text{ OF } \text{INTEGER} \{(\forall i : 0 \leq i < m : a[i] > 0)\}$

Voor  $0 \leq p \leq q < m$  wordt de functie  $f$  gedefinieerd door

$$f(p, q) = \begin{cases} a[p] & \text{als } p = q \\ a[p] + \frac{1}{f(p+1, q)} & \text{als } p < q \end{cases}$$

**PROCEDURE** *Kettingbreuk* ( $x, y : \text{INTEGER}$ ) =

{ extern  $t, n : \text{INTEGER}$ ; all  $X \in \mathbb{Q}$  :

: pre  $0 \leq x \leq y < m \wedge f(x, y) = X$ ,

, post  $t > 0 \wedge n > 0 \wedge t = X \cdot n$ }

- 6. Implementeer de procedure *Kettingbreuk* en bewijs de correctheid van de oplossing. Formuleer daartoe expliciet de inductiehypothese.



einde